

Vektorlar algebrasining elementlari

Tabiiy fanlarning ba'zi-bir bo'limlarida faqat son qiymati bilan tavsiflanuvchi va skalyarlar deb ataluvchi kattaliklar qatorida ham son qiymati ham yo'nalishi bilan tavsiflanuvchi kattaliklarni o'rganishga to'g'ri keladi. Bunday, ham son qiymati ham yo'nalishi bilan tavsiflanuvchi kattaliklarni *vektor kattaliklar* deb ataladi. Masalan, uzunlik, yuza, hajm, massa skalyar kattaliklarga; kuch, tezlik, tezlanish, magnit maydonining biror nuqtasidagi kuchlanishi vektor kattaliklarga misoldir.

Matematikada skalyar kattaliklarni *skalyarlar* deb atalib, ularni sonlar vositasida o'rganilsa, vektor kattaliklarni *vektor tushunchasi* yordamida o'rganiladi.

Geometriyada oddiy kesma tushunchasidan tashqari, yo'nalishli, ya'ni ma'lum bir uchi boshlanishi, ikkinchi uchi esa oxiri deb qabul qilingan kesma tushunchasi ham qaraladi. Yo'nalishli kesmani ma'lum tartibda olingan (berilgan), uning boshi va oxiri deb hisoblanuvchi, ikkita nuqta aniqlaydi. Oddiy kesmada esa uning uchlarini aniqlovchi ikkita nuqtalar tartibining ahamiyati yo'qdir.

3.1. Vektor tushunchasi

3.1.1-ta'rif. *Boshlanish va oxirgi nuqtasi ko'rsatilgan (aniqlangan) kesma (yo'nalishli kesma) yoki ikkita nuqtalarning tartiblangan jufti vektor deb atalib, birinchi nuqta uning boshi, ikkinchisi esa uchi (oxiri) deyiladi.*

Boshi A, uchi esa B nuqtada bo'lgan vektorni $\overrightarrow{AB}$ (yoki $\overline{AB}$) kabi belgilanadi (vektorning boshini anglatadigan harf har doim birinchi o'rinda yoziladi). Ba'zida vektor bitta satriy harf bilan ham belgilanadi, masalan, $\vec{a}$ (yoki $\bar{a}$) kabi. Chizmada vektor ko'rsatkichli kesma shaklida tasvirlanadi (3.3.1-rasm).

Boshi bilan uchi ustma-ust tushadigan vektor *nol vektor* deb ataladi va $\vec{0}$ kabi belgilanadi. Nol vektor yo'nalishli emasligi aniqdir, shu sababli, uni oddiy nol soni kabi ham yoziladi.

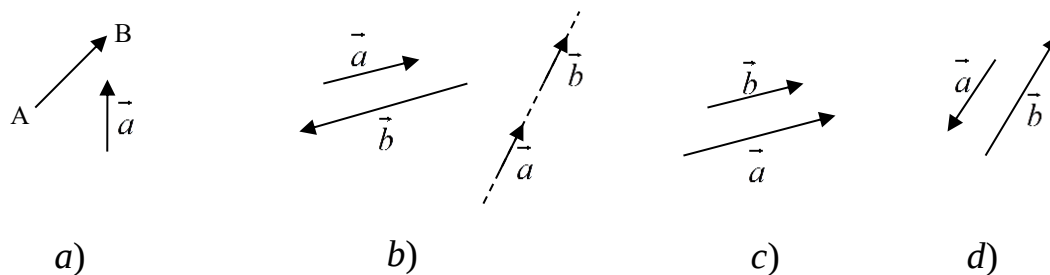
Vektorga mos kesmaning uzunligi uning *moduli* (yoki *uzunligi*) deyiladi. $\overrightarrow{AB}$ ($\vec{a}$) vektor moduli $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$) kabi belgilanadi. Faqatgina *nol vektor moduli nolga teng* bo'lib, *noldan farqli vektor moduli musbat son* bo'lishi aniqdir.

Moduli birga teng bo'lgan vektorni birlik vektor (ort) deb ataladi.

3.1.2-ta'rif. *Parallel to'g'ri chiziqlarda yoki bitta to'g'ri chiziqda yotuvchi vektorlarni kollinear vektorlar deb ataladi (3.1.1_b-rasm).*

Kollinear bo'lgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni $\vec{a} \parallel \vec{b}$ kabi belgilanadi.

3.1.3-ta'rif. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bo'lib, agar vektorlarning yo'nalishlari bir xil bo'lsa, ular *yo'nalishdosh* (yoki *bir xil yo'nalishli*) deb ataladi va $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ kabi belgilanadi (3.1.1_c-rasm), agar yo'nalishlari turlicha bo'lsa, *qarama-qarshi yo'nalishli* deb atalib, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ kabi belgilanadi (3.1.1_d-rasm).



3.1.1-rasm.

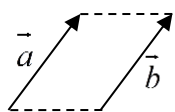
3.1.4-ta'rif. Agar $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ va $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar *teng vektorlar* deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ kabi yoziladi (3.1.2-rasm).

Bu ta'rifdan biror vektorni parallel ko'chirish natijasida hosil qilingan vektor dastlabki vektorga teng bo'lishi kelib chiqadi.

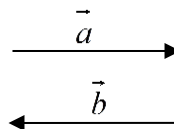
3.1.5-ta'rif. Agar $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ va $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar *qarama-qarshi vektorlar* deyiladi va $\vec{a} = -\vec{b}$ (yoki $\vec{b} = -\vec{a}$) kabi yoziladi (3.1.3-rasm).

$\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BA}$ lar qarama-qarshi vektorlar ekanligi ravshandir.

$\vec{a}$ ga qarama-qarshi vektorni $-\vec{a}$ kabi belgilanadi.



3.1.2-rasm.



3.1.3-rasm.

Quyidagi xossalarning o'rinli ekanligini ko'rsatish qiyin emas:

1⁰. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \vec{a}$;

2⁰. $\vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c}$;

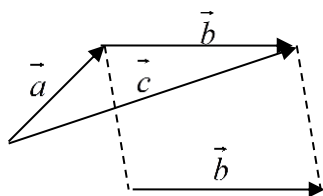
3⁰. $\vec{a} = -\vec{b} \wedge \vec{b} = -\vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c}$.

3.2. Vektorlar ustida chiziqli amallar

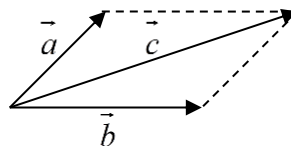
Vektorlar ustida chiziqli va chiziqsiz bo'lgan amallar mavjuddir. Bu bandda vektorlar ustidagi chiziqli bo'lgan ularni qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish amallari bilan tanishamiz.

3.2.1. Vektorlarni qo'shish

3.2.1-ta'rif. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb, $\vec{b}$ vektor boshini parallel ko'chirish bilan $\vec{a}$ vektorning uchiga keltirilgach, boshi $\vec{a}$ ning boshida uchi esa $\vec{b}$ ning uchida bo'lgan $\vec{c}$ vektorga aytiladi va $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ kabi yoziladi (3.2.1-rasm).



3.2.1-rasm.

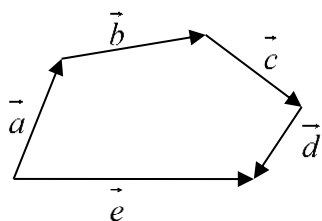


3.2.2-rasm.

Bu ta'rifda keltirilgan usul vektorlarni qo'shishning geometrik usullaridan biri bo'lib, uni *uchburchak qoidasi* (yoki *uch nuqta qoidasi*) deb yuritiladi. Bu borada *parallelogramm qoidasi* ham mavjud bo'lib, unda berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb, parallel ko'chirish yordamida vektorlarning boshlari bir nuqtaga keltirilgach, ularga qurilgan parallelogrammning vektorlar umumiy boshidan chiquvchi diagonali qabul qilinadi (3.2.2-rasm).

Vektorlarni qo'shishning uchburchak va parallelogramm qoidalarining ekvivalent ekanligiga mustaqil ishonch hosil qilishni tavsiya qilamiz.

Vektorlar soni ikkitadan ortiq bo'lganda ularning yig'indisi *siniq chiziq qoidasi* bilan ta'riflanadi, ya'ni parallel ko'chirish bilan vektorlardan keyingisining boshini oldingisining uchiga keltirish natijasida hosil qilingan siniq chiziqning birinchi vektori boshini so'nggi vektori uchi bilan tutashtiruvchi (siniq chiziqni yopuvchi) vektor berilgan vektorlarning yig'indisi deb qabul qilinadi (3.2.3-rasm).



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$$

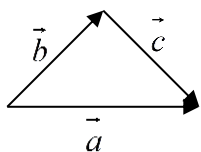
3.2.3-rasm.

Vektorlarni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega ekanligiga ishonch hosil qilish osondir:

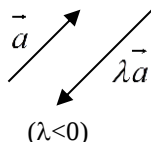
- 1⁰. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 2⁰. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
- 3⁰. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
- 4⁰. $\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

3.2.2. Vektorlarni ayirish

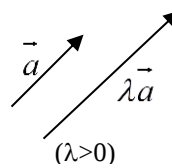
3.2.2-ta'rif. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, $\vec{b}$ vektor bilan yig'indisi $\vec{a}$ vektorga teng bo'ladigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi va $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ kabi yoziladi ($\vec{b} + \vec{c} = \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$).



3.2.4-rasm.



3.2.5- rasm.



Bu ta'rifdan ko'rinadiki, vektorlarni ayirish ularni qo'shishga teskari amaldir. Demak, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni geometrik jixatdan ayirish uchun ularning boshlarini, parallel ko'chirish yordamida, bitta nuqtaga keltirish, so'ngra, boshi ikkinchi ($\vec{b}$) vektorning uchida, uchi esa birinchi ($\vec{a}$) vektorning uchida bo'lgan ($\vec{c}$) vektorni qurish kifoyadir (3.2.4-rasm).

3.2.3. Vektorni songa ko'paytirish

3.2.3-ta'rif. Berilgan $\vec{a}$ vektorning berilgan λ songa ko'paytmasi deb, quyidagi qoidalar bilan aniqlanuvchi $\vec{b}$ vektorga aytiladi:

$$1) \quad |\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|;$$

$$2) \quad \lambda < 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}, \lambda > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$$

va $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ (yoki $\vec{b} = \vec{a} \lambda$) kabi belgilanadi (3.2.5-rasm).

Vektorni songa ko'paytirish amali tubandagi xossalarga ega ekanligiga ishonch hosil qilish osondir ($\lambda, \mu \in R$):

$$1^0. \quad 0\vec{a} = \vec{0};$$

$$2^0. \quad \lambda \vec{0} = \vec{0};$$

$$3^0. \quad 1\vec{a} = \vec{a};$$

$$4^0. \quad (-1)\vec{a} = -\vec{a};$$

$$5^0. \quad \lambda(\vec{a} \pm \vec{b}) = \lambda \vec{a} \pm \lambda \vec{b};$$

$$6^0. \quad (\lambda \pm \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} \pm \mu \vec{a};$$

$$7^0. \quad \lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda \mu) \vec{a};$$

$$8^0. \quad |\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|.$$

3.2.1-teorema. Agar $\vec{a} // \vec{b} \wedge \vec{a} \neq \vec{0}$ bo'lsa, shunday λ son mavjud bo'lib, $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, bu son uchun $|\lambda| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ bo'lib, uning ishorasi $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ bo'lsa

musbat, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ bo'lsa manfiy, $\vec{b} = \vec{0}$ bo'lganda esa $\lambda = 0$ bo'lishi ravshandir.

Kezi kelganda, noldan farqli $\vec{a}$ vektor yo'nalish, $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{a}_0 \wedge \left| \frac{\vec{a}}{a_0} \right| = 1$ bo'lgan $\vec{a}_0$ vektor esa, $\vec{a}$ vektorning (yo'nalishning) birlik vektori (orti) deb atalib, uning uchun

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}_0$$

tenglik bajarilishini aytamiz.

3.3. Vektorlar sistemasining chiziqli bog'liqlik va bog'liq emaslik (erklilik) tushunchalari

3.3.1-ta'rif. Berilgan $\vec{a}_i (i = \overline{1;n}, n \in N)$ vektorlar sistemasi (to'plami) uchun

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = 0 \quad (3.3.1)$$

tenglik $\lambda_i (i = \overline{1;n})$ sonlarning barchasi nolga teng bo'lgandagina o'rinli bo'lsa, bu vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq emas (chiziqli erkli), aks holda, chiziqli bog'liq deyiladi.

$\vec{a}_i (i = \overline{1;n})$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lishi uchun (3.3.1) tenglik $\lambda_i (i = \overline{1;n})$ sonlardan aqalli bittasi noldan farqli bo'lganda o'rinli bo'lishi kerak ekan. Bundan, agar vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, ulardan birortasini qolganlari orqali chiziqli ifodalash mumkinligi va, aksincha, agar vektorlar sistemasining vektorlaridan birortasini qolganlari orqali chiziqli ifodalash mumkin bo'lsa, ularning chiziqli bog'liqligi kelib chiqadi.

Quyidagi misollarni keltiramiz

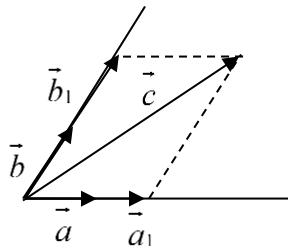
1) Noldan farqli bitta $\vec{a}$ dan iborat bo'lgan sistemaning chiziqli erkli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

2) Kollinear bo'lgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqdir va, aksincha, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, ular kollinear. Haqiqatdan ham, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bo'lganda, $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$ hol uchun bu aniqdir, agar vektorlardan biri, masalan, $\vec{a} \neq \vec{0}$ bo'lsa, $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ bo'lishi 3.2.1-teoremadan kelib chiqadi. Demak, $-\lambda \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ bo'lib, $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}$ tenglik $\lambda_1 = -\lambda$, $\lambda_2 = 1 \neq 0$ uchun o'rinli ekanligidan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqdir. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ekanligini ko'rsatish qiyin emas (o'quvchining o'ziga havola qilamiz).

3). Agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotsa, ularni komplanar vektorlar deb ataladi.

Komplanar bo'lgan uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi va, aksincha, bu vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsa, ular komplanardir. Haqiqatdan ham, vektorlardan biror juftligi kollinear (masalan, $\vec{a} \parallel \vec{b}$) bo'lgan hol uchun bu ravshandir. Demak, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemasida birorta ham juftlik kollinear bo'lmagan holni qarash kifoyadir. Bu holda, vektorlarning uchalasi ham noldan farqli ekanligi aniq bo'lib, ular komplanar bo'lganligi uchun parallel ko'chirish yordamida ularning boshlari bitta nuqtaga keltirilgach, bitta tekislikda yotishi ham aniqdir. Demak, bu vektorlardan birini (masalan, $\vec{c}$) parallelogramm qoidasi yordamida qolgan ikkitasining (masalan, $\vec{a}, \vec{b}$)

yo'nalishlari bo'yicha ikkita vektorlarning (3.2.6-rasmda $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}$ va $\vec{b}_1 \parallel \vec{b}$) yig'indisi orqali ifodalash mumkin.



3.2.6- rasm.

3.2.6-rasmdan $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$.

Endi, $\vec{a}_1 \parallel \vec{a} \wedge \vec{b}_1 \parallel \vec{b} \wedge |\vec{a}| \neq 0 \wedge |\vec{b}| \neq 0 \Rightarrow \vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{a} \wedge \vec{b}_1 = \lambda_2 \vec{b}$ ekanligini hisobga olsak, $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} \Rightarrow \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} - \vec{c} = 0$.

Demak, $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = 0$ tenglik $\lambda_3 = -1 \neq 0$ bo'lganda bajarilganligi uchun $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqdir.

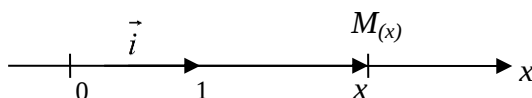
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, ularning komplanar ekanligini ko'rsatish qiyinchilik tug'dirmaydi (mustaqil bajarishni tavsiya qilamiz).

3.4. Vektorning o'qdagi proyeksiyasi

Avvalo, o'q tushunchasini kiritaylik. Agar berilgan to'g'ri chiziqda yotgan holda qo'zg'aluvchi nuqtani qarasak, u faqat ikki yo'nalish bo'yicha harakatlanishi mumkinligi aniqdir. Bu yo'nalishlardan birini musbat boshqasini esa manfiy deb qabul qilsak, *to'g'ri chiziqda musbat yo'nalish aniqlangan* deyiladi.

Musbat yo'nalishi tanlangan to'g'ri chiziq o'q deyiladi va o'qning yo'nalishi deyilganda, uning musbat yo'nalishini tushunamiz.

O'qning yo'nalishi, odatda, to'g'ri chiziqqa ko'rsatkich qo'yish bilan aniqlanadi (3.4.1-rasm).



3.4.1- rasm.

O'qning yo'nalishi bilan yo'nalishdosh birlik $\vec{i}$ vektor uning *orti* (*bazisi*) deyiladi.

To'g'ri chiziqda musbat yo'nalish $\vec{i}$ ort va koordinatalar boshi deb ataluvchi O nuqta tanlab olingan bo'lsin. U vaqtda, bu to'g'ri chiziq o'qdan iborat va unda yotgan M nuqtaga $\vec{OM}$ vektorni mos qo'yish mumkin bo'lib, $\vec{OM} \parallel \vec{i} \wedge |\vec{i}| = 1 \neq 0$ ekanligidan 3.2.1-teoremaga ko'ra

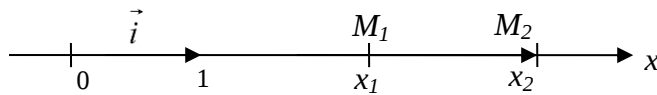
$$\vec{OM} = xi \quad (3.4.1)$$

ni yozish mumkin. (3.4.1) da $|x| = |\overrightarrow{OM}|$ bo'lib, $\overrightarrow{OM} \uparrow \uparrow \vec{i} \Rightarrow x > 0$, $\overrightarrow{OM} \uparrow \downarrow \vec{i} \Rightarrow x < 0$, M nuqta O bilan ustma-ust tushsa, $x = 0$ bo'lishi ravshandir.

Demak, yuqorida kiritilgan o'qning har bir M nuqtasiga (3.4.1) vositasida aniq bitta x sonni mos qo'yish mumkinligini ko'ramiz. Va, aksincha, har bir x haqiqiy songa, (3.4.1) vositasida, aytilgan o'qning bitta M nuqtasi mos qo'yiladi. Demak, bunday kiritilgan o'qning nuqtalari va haqiqiy sonlar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan. Bunday kiritilgan o'qni Ox o'qi deb nomlab, unda Dekart koordinatalar sistemasini kiritilgan deb ataymiz, hamda M nuqtaga (3.4.1) vositasida mos qo'yilgan x sonni uning koordinatasi deb atab, $M(x)$ ko'rinishda yozishni qabul qilamiz. Shuningdek, x sonni $\overrightarrow{OM}$ vektorning koordinatasi deb ham ataymiz.

Bunday kiritilgan Dekart koordinatalar sistemasini sonlar o'qi deb atalishi bizga ma'lumdir.

Eslatma. Ko'pincha, x songa o'qdagi mos nuqtani x ning o'zi bilan belgilanadi (3.4.1-rasmga qarang).



3.4.2-rasm.

Endi, Ox o'qining $M_1(x_1)$ va $M_2(x_2)$ nuqtalari bilan aniqlanuvchi $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorni qarasak (3.4.2-rasm),

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i}$$

ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emasdir.

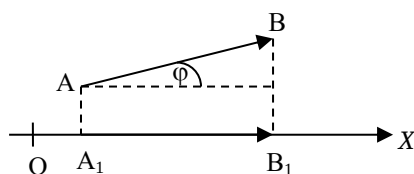
Demak,

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = |x_2 - x_1| \quad (3.4.2)$$

bo'lishi ravshandir. (3.4.2) sonlar o'qidagi ikki nuqta orasidagi masofa formulasidir.

3.4.1-ta'rif. $\overrightarrow{AB}$ vektorning Ox o'qidagi proyeksiyasi deb, uning boshi va uchidan o'qqa tushirilgan perpendikulyarlarning asoslari bo'lgan A_1 va B_1 mos nuqtalar bilan aniqlanuvchi $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektor o'q bilan yo'nalishdosh bo'lganda $|\overrightarrow{A_1B_1}|$ ga, qarama-qarshi yo'nalishli bo'lganda $-|\overrightarrow{A_1B_1}|$ ga, nol vektordan iborat bo'lganda (A_1 va B_1 lar ustma-ust tushganda) esa nolga aytiladi va $\pi p_{ox} \overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi (3.4.3-rasm).

Demak, ta'rif bo'yicha $\pi p_{ox} \overrightarrow{AB} = \pm |\overrightarrow{A_1B_1}|$ bo'lib, bu yerda «+» ishora $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow \uparrow Ox$, «-» esa $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow \downarrow Ox$ bo'lgan holga to'g'ri keladi.



3.4.3- rasm.

$\overrightarrow{AB}$ vektorining Ox o'q yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi $(\overrightarrow{AB}, \wedge Ox) = \varphi$ ma'lum bo'lsa, 3.4.3-rasmdan

$$\pi p_{ox} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi \quad (3.4.2)$$

ekanligini olish qiyin emas.

(3.4.2) yordamida va 3.4.1-ta'rifga asoslanib proyeksiyaning quyidagi xossalarini ko'rsatish osondir ($\lambda \in R$):

$$1^0. \quad \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{a} \perp Ox \Leftrightarrow \pi p_{ox} \vec{a} = 0;$$

$$2^0. \quad \pi p_{ox} (\lambda \vec{a}) = \lambda \pi p_{ox} \vec{a};$$

$$3^0. \quad \pi p_{ox} (\vec{a} \pm \vec{b}) = \pi p_{ox} \vec{a} \pm \pi p_{ox} \vec{b};$$

4⁰. Agar $\vec{a}$ vektorining boshi va uchidan Ox sonlar o'qiga tushirilgan perpendikulyarlar asoslarining (ya'ni ortogonal proyeksiyalarining) koordinatalari mos ravishda x_1 va x_2 bo'lsa, $\pi p_{ox} \vec{a} = x_2 - x_1$ bo'ladi.

3.5. Vektorni berilgan yo'nalishlar bo'yicha tashkil etuvchilarga ajratish Dekart bazisi

Avvalo, bu tushunchalarni tekislikda qaraymiz. Aytaylik, tekislikda kollinear bo'lmagan (chiziqli erkli) $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar (yo'nalishlar) berilgan bo'lsin. U vaqtda, shu tekislikda yotuvchi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni olsak, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{a}\}$ vektorlar sistemasi komplanar bo'lib, ular chiziqli bog'liq ekanligidan $\vec{a}$ ni $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar orqali

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \quad (3.5.1)$$

kabi chiziqli ifodalash mumkin bo'lib (3.3-bandga qarang), $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tekislikdagi *bazis* (yoki *bazis vektorlar*); x va y lar $\vec{a}$ vektorining *koordinatalari*; (3.5.1) ning o'ng tomoni *bazis bo'yicha yoyilmasi*; $x\vec{e}_1$ va $y\vec{e}_2$ larni esa tashkil etuvchilari deb ataladi va $\vec{a}(x; y)$ yoki $\vec{a} = (x; y)$ yoki $\vec{a} = \{x; y\}$ kabi yozishga kelishib olamiz va uni tekislikda koordinatalari bilan berilgan vektor deb ataymiz.

$$\vec{a}(x; y) = \vec{0} \Leftrightarrow (x = 0 \wedge y = 0) \text{ ekanligi ravshandir, ya'ni } \vec{O}(0; 0).$$

Tekislikda berilgan ikkita yo'nalishlar (vektorlar) ortlardan (birlik vektorlardan) iborat va perpendikulyar bo'lgan holni qarab, ularni $\vec{i}, \vec{j}$ kabi belgilaylik. Demak, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1 \wedge \vec{i} \perp \vec{j}$.

Mazkur tekislikda biror O nuqtani olib, uni orti $\vec{i}$ dan iborat Ox va $\vec{j}$ dan iborat Oy o'qlarning umumiy boshi deb qabul qilaylik (3.5.1-rasm). Bu tekislikning ixtiyoriy M

nuqtasini olib uni O nuqta bilan tutashtiruvchi $\overrightarrow{OM}$ vektorni qurib, uning Ox va Oy o'qlarga proyeksiyalarini mos ravishda $\pi_{\vec{i}}\overrightarrow{OM} = x$, $\pi_{\vec{j}}\overrightarrow{OM} = y$ deb belgilasak, tekislikdagi har bir M nuqtaga ikkita sonlarning yagona (x;y) juftligi mos kelishini ko'ramiz. Buning aksinchasi ham to'g'ridir, ya'ni ikkita sonlarning har bir (x;y) juftligiga yuqoridagi tekislikning yagona M nuqtasi mos keladi. Demak, bu tekislikning nuqtalari va ikkita sonlarning tartiblashgan juftliklari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjuddir. Bu aytilganlarga asosan, *tekislik nuqtasini M(x;y) ko'rinishda belgilashga, x va y larni uning koordinatalari, x ni absissasi, y ni esa ordinatasi deb, hamda Ox ni absissalar, Oy ni esa ordinatalar o'qi deb atashga kelishib olamiz.*

Bu usul bilan kiritilgan sistemani *tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi* deb ataladi va, odatda, uni xOy kabi belgilanadi.

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, agar Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan tekislikda yotuvchi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni sistema o'qlarining ortlari $\vec{i}$ va $\vec{j}$ lar bo'yicha tashkil etuvchilarga ajratsak, (3.5.1)

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

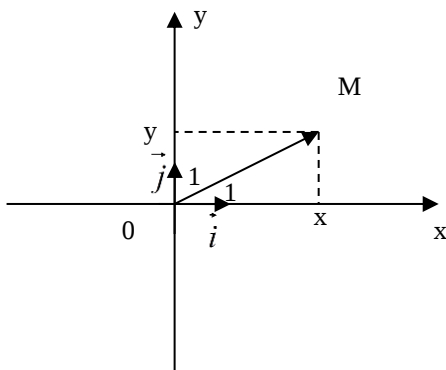
ko'rinishni olib, bunda

$$x = \pi_{\vec{i}}\vec{a}, \quad y = \pi_{\vec{j}}\vec{a}$$

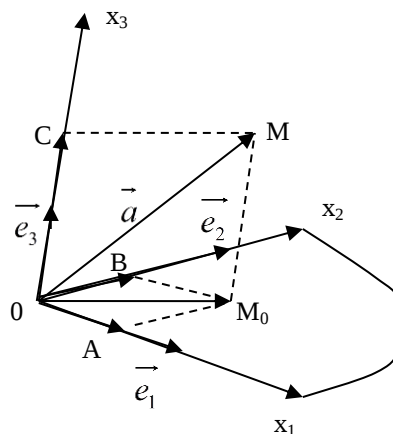
bo'lishi ravshandir. Bu holda, $\vec{i}$ va $\vec{j}$ ortlarni *tekislikda Dekart bazisi* deb ataymiz.

Ox – absissalar o'qini yotiq (gorizantal) holatda (demak, Oy – ordinatalar o'qini tik (vertikal) holatda) olish odatini (an'anasi) saqlab qolamiz (3.5.1-rasm).

1-eslatma. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini ba'zan *koordinatalar tekisligi* deb yuritiladi.



3.5.1-rasm.



3.5.2-rasm.

Endi, fazoda $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlarning komplanar bo'lmagan sistemasi berilgan bo'lsin. Bu vektorlarning boshini bitta O nuqtaga keltirib, orte $\vec{e}_i$ vektorning birlik vektori $\vec{e}_{i0}$ ($i=\overline{1;3}$) dan iborat boshi eslatilgan O nuqtada bo'lgan uchta Ox_i ($i=\overline{1;3}$) o'qlarni o'tkazaylik. U vaqtda, yo'nalishlar komplanar bo'lmaganligi sababli bu o'qlarning har ikkitasi orqali bitta (demak, jami 3 ta) tekislik o'tadi. Aniqlik uchun ulardan bittasini, masalan, Ox_1 va Ox_2 o'qlar orqali o'tuvchisini olaylik (3.5.2-rasm).

Fazoda $\vec{a}$ vektor berilgan bo'lsa, uni parallel ko'chirish bilan 3.5.2-rasmdagidek $\overrightarrow{OM}$ holatga keltirilgan deb faraz qilib, M nuqta orqali Ox_3 o'qga parallel to'g'ri chiziq o'tkazsak, u yuqorida aytilgan tekislikni biror M_0 nuqtada kesadi. U vaqtda, $\overrightarrow{OM_0}$ vektor kollinear bo'lmagan $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ yo'nalishlar tekisligida yotganligi sababli uni (3.5.1) ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\overrightarrow{OM_0} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

$$\begin{aligned} 3.5.2\text{-rasmdan } \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} \text{ va } \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{e}_3 \text{ ekanligidan } \overrightarrow{M_0M} = z\vec{e}_3 \text{ bo'lib,} \\ \vec{a} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

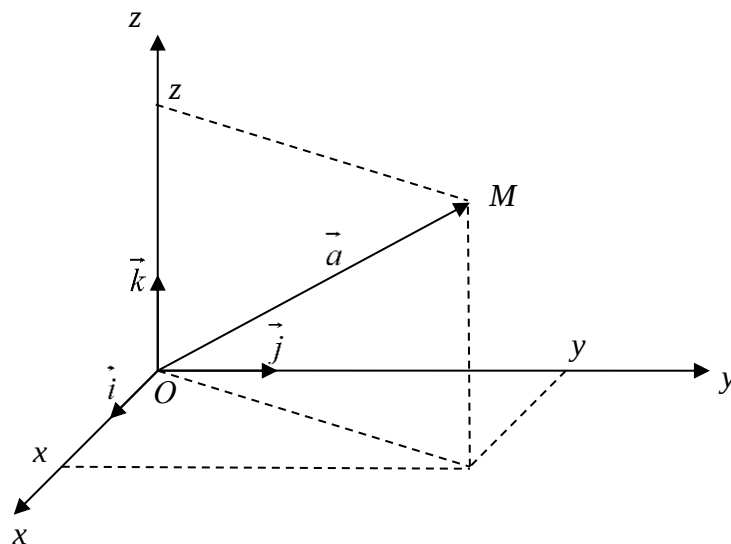
ni olamiz. Demak, fazoda komplanar bo'lmagan uchta $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar berilgan bo'lsa, ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni ular yordamida (3.5.2) ko'rinishda chiziqli ifodalash mumkin ekan. Bunda $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ni *fazoda bazis*; x, y, z larni $\vec{a}$ vektorning *koordinatalari*; (3.5.2) ning o'ng tomonini *bazis bo'yicha yoyilmasi*; $x\vec{e}_1, y\vec{e}_2, z\vec{e}_3$ larni esa *tashkil etuvchilari* deb ataladi. Bu holda $\vec{a}$ vektorni

$$\vec{a}(x; y; z) \text{ yoki } \vec{a} = (x; y; z) \text{ yoki } \vec{a} = \{x; y; z\}$$

kabi yozishga kelishib olamiz va uni *koordinatalari bilan berilgan vektor* deb ataymiz. $\vec{0}(0; 0; 0)$ ekanligi ravshandir.

Yuqorida qilingan mulohazalarga asoslanib, fazoda uchtdan ortiq vektorlardan iborat sistema chiziqli bog'liq bo'ladi degan xulosani chiqarish mumkin.

Fazoda berilgan uchta yo'nalishlar (vektorlar) ortlardan (birlik vektorlardan) iborat va ular juft-jufti bilan perpendikulyar bo'lgan holni qaraylik. U vaqtda, yuqorida kiritilgan o'qlarni mos ravishda Ox -abssissalar, Oy -ordinatalar, Oz - applikatalar o'qi deb ataymiz va ularning ortlarini mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ deb belgilaymiz. Ox va Oy o'qlarini yotiq (gorizontal) tekislikda yotadi (an'anaga asoslanib) deb faraz qilamiz (3.5.3-rasm).



3.5.3-rasm.

Bu holda (3.5.2)

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ko'rinishni oladi va $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ ekanligidan M nuqta x, y, z koordinatalarga ega deb, $M(x; y; z)$ kabi yozishni shartlashamiz. Undan tashqari,

$$x = \pi p_i \overrightarrow{OM}, y = \pi p_j \overrightarrow{OM}, z = \pi p_k \overrightarrow{OM}$$

ekanligi ravshandir.

Bunday kiritilgan sistemani *fazoda Dekart koordinatalar sistemasi*, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ esa *fazoda Dekart bazisi* deb ataladi va Oxyz kabi belgilanadi.

2-eslatma. Fazoda Dekart koordinatalar sistemasini *koordinatalar fazosi* va har ikkita koordinatalar o'qlari orqali o'tuvchi tekislikni koordinatalar tekisligi deb yuritiladi.

Koordinatalari bilan berilgan vektorlar uchun quyidagilar o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

$\vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2), x_i; y_i; z_i \in R(i = \overline{1; 2}), \lambda \in R$ bo'lsin:

1) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \wedge z_1 = z_2);$

2) $\vec{O}(0; 0; 0);$

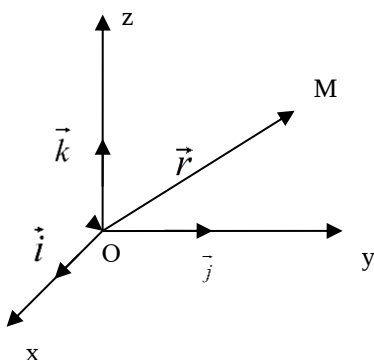
3) $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2);$

4) $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1).$

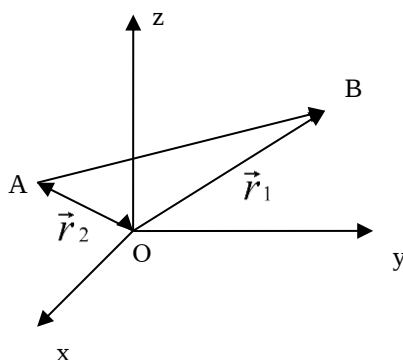
3-eslatma. Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan fazoning nuqtalari to'plami va $R^3 = R \times R \times R = \{(x; y; z): x \in R \wedge y \in R \wedge z \in R\}$ to'plam orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjudligi sababli uni R^3 (*uch o'lchovli*) fazo deb yuritiladi. Xuddi shunga o'xshash, Dekart koordinatalar tekisligini R^2 (*ikki o'lchovli*), sonlar o'qini esa R (*bir o'lchovli*) fazo deb yuritilishini aytamiz.

3.6. Nuqtaning radius vektori

Aytaylik, fazoda Oxyz Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lib, unda $M(x; y; z)$ nuqta olingan bo'lsin. U vaqtda, M nuqtani koordinatalar boshi bilan tutashtiruvchi $\overrightarrow{OM}$ vektor uning *radius vektori* deyilib, $\vec{r}$ bilan belgilanadi, ya'ni $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (3.6.1-rasm).



3.6.1- rasm.



3.6.2- rasm.

$M(x; y; z)$ nuqta radius vektorining koordinatalari shu nuqta koordinatalaridan iborat, ya'ni $\vec{r} = (x; y; z)$ ekanligini ko'rish qiyin emasdir.

Demak,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ni yozish mumkin.

Agar fazoda boshi $A(x_1; y_1; z_1)$, uchi $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalarda bo'lgan $\overrightarrow{AB}$ vektorni qarasak, 3.6.2-rasmdan foydalanib, $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin (mustaqil bajaring). Demak, $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinatalari uchi va boshining mos koordinatalarining ayirmasidan iborat bo'lar ekan.

3.7. Vektorning moduli va yo'naltiruvchi kosinuslari

Aytaylik, $\vec{a}(x; y; z)$ vektor berilgan bo'lsin. Uni uch o'lchovi $|x|, |y|, |z|$ lardan iborat to'g'ri burchakli parallelepipedning diagonal deb qarash mumkin (3.7.1-rasm). U vaqtda,

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.7.1)$$

ni olamiz. (3.7.1) vektor moduli uning koordinatalari vositasida topish formulasidir.

Agar $\alpha = (\vec{a} \wedge \vec{i})$, $\beta = (\vec{a} \wedge \vec{j})$, $\gamma = (\vec{a} \wedge \vec{k})$ burchaklarni kiritsak,
 $\pi p_i \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha$, $\pi p_j \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta$, $\pi p_k \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma$ tengliklardan hamda
 $\pi p_i \vec{a} = x$, $\pi p_j \vec{a} = y$, $\pi p_k \vec{a} = z$ va (3.7.1) ni hisobga olib, $|\vec{a}| \neq 0$ bo'lganda

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

larni olamiz. Bunday aniqlangan $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ lar $\vec{a}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deb ataladi. Ular quyidagi xossalarga ega ekanligiga ishonch hosil qilish osondir:

$$1^0. \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1;$$

$$2^0. \quad \vec{a}_0(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \text{ berilgan } \vec{a} \text{ vektorning birlik vektoridan iboratdir.}$$

Agar $\vec{a}(x; y)$ vektor koordinatalar tekisligida berilgan bo'lsa, (3.7.1)

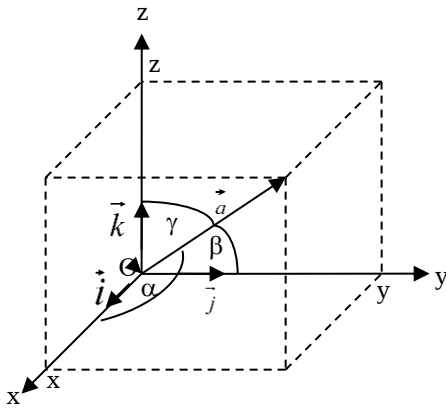
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ko'rinishni oladi. Bu holda, $\alpha = (\vec{a} \wedge \vec{i})$, $\beta = (\vec{a} \wedge \vec{j})$ burchaklar uchun $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ bo'lib,

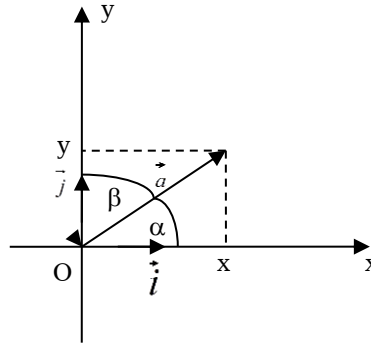
$|\vec{a}| \neq 0$ bo'lganda yo'naltiruvchi kosinuslar

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \beta = \sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

bo'ladi (3.7.2-rasmga qarang).



3.7.1- rasm.



3.7.2- rasm.

3.8. Ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

Agar $A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar koordinatalar fazosida berilgan bo'lsa, ular orasidagi masofani $d(A; B)$ bilan belgilasak,

$$d(A; B) = |\overrightarrow{AB}|$$

ekanligi ravshandir.

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

bo'lganligidan (3.7.1) formulaga ko'ra

$$d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3.8.1)$$

ni olamiz. (3.8.1) *ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidir.*

Aytaylik, yuqoridagi A va B nuqtalar bilan birga λ son ham berilgan bo'lib, nuqtalar ustma-ust tushmasin. U vaqtda, AB kesmani λ nisbatda bo'lish masalasi quyidagicha qo'yiladi: AB kesma yotgan to'g'ri chiziqli shunday C nuqta topilsinki, $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$ tenglik o'rinli bo'lsin (3.8.1-rasm).

$C(x; y; z)$ desak, $\overrightarrow{AC} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$, $\overrightarrow{CB} = \{x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z\}$ bo'lib, yuqoridagi tenglikdan

$$\begin{aligned} \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\} &= \{\lambda (x_2 - x); \lambda (y_2 - y); \lambda (z_2 - z)\} \Rightarrow \\ \Rightarrow x - x_1 &= \lambda (x_2 - x), y - y_1 = \lambda (y_2 - y), z - z_1 = \lambda (z_2 - z). \end{aligned}$$

ni va oxirigidan

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (3.8.2)$$

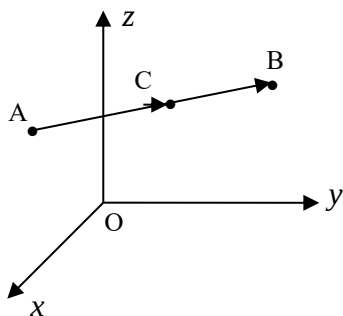
ni olamiz. (3.8.2) *kesmani berilgan λ nisbatda bo'lish formulalaridir.*

Agar $\lambda=1$ bo'lsa, *kesmaning o'rtasini topish formulalariga* ega bo'lamiz:

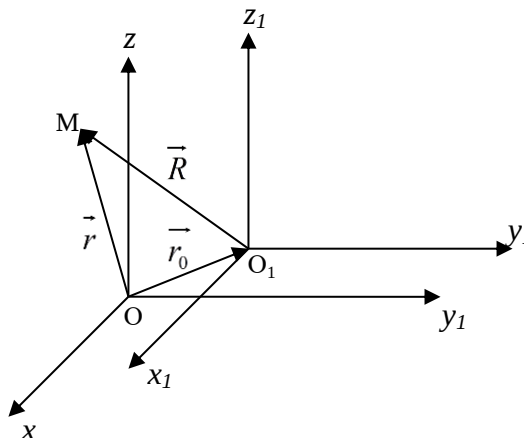
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (3.8.3)$$

Eslatma. Agar yuqorida koordinatalar tekisligi haqida so'z ketsa, (3.8.1), (3.8.2), (3.8.3) formulalarda uchinchi koordinata qatnashmaydi. Ya'ni koordinatalar tekisligida berilgan $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ nuqtalar uchun (3.8.1) formula $d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ko‘rinishni; (3.8.2) esa $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ ko‘rinishni oladi. Sonlar o‘qidagi $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar uchun $d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$, $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ kabi bo‘ladi.



3.8.1- rasm.



3.9.1- rasm.

3.9. Koordinatalar boshini ko‘chirish formulalari

Aytaylik, fazoda kiritilgan Oxyz Dekart koordinatalar sistemasining boshini, o‘qlari yo‘nalishlarini saqlagan holda, uning $O_1(x_0; y_0; z_0)$ nuqtasiga ko‘chirib yangi $O_1x_1y_1z_1$ sistema hosil qilingan bo‘lsin (3.9.1-rasm).

Fazodagi M nuqta Oxyz sistemada $M(x; y; z)$, $O_1x_1y_1z_1$ da esa $M(x_1; y_1; z_1)$ koordinatalarga ega deb faraz qilaylik. U vaqtda, 3.9.1-rasmdan ko‘rinadiki, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$ tenglik o‘rinlidir. Radius-vektorlar uchun $\vec{r} = (x; y; z)$, $\vec{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$ $\vec{R} = (x_1; y_1; z_1)$ ekanligidan, yuqoridagi tenglikka asosan,

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0, \\ z_1 = z - z_0 \end{cases} \quad (3.9.1)$$

ni olamiz. (3.9.1) *koordinatalar boshini ko‘chirish formulalari (almashtirishlari)* deb yuritiladi.

Eslatma. Agar yuqorida koordinatalar tekisligi haqida so‘z ketgan bo‘lsa, (3.9.1) da uchinchi z koordinata qatnashmaydi. Ya’ni, xOy koordinatalar tekisligi boshini, uning o‘qlari yo‘nalishini o‘zgartirmay, $O_1(x_0; y_0)$ nuqtasiga ko‘chirilgan bo‘lsa, M nuqtaning dastlabki xOy sistemadagi $(x; y)$ va keyingi x_1Oy_1 sistemadagi $(x_1; y_1)$ koordinatalari orasidagi bog‘lanish

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0 \end{cases}$$

dan iborat bo‘lishi ravshandir.

Sonlar o‘qida O koordinatalari boshi uning $M_0(x_0)$ nuqtasiga ko‘chirilsa, M nuqtaning dastlabki va keyingi sonlar o‘qidagi mos x va x_1 koordinatalari orasida

$$x_1 = x - x_0$$

bog'lanish borligi aniqdir.

3.10. Vektorlar ustida chiziqsiz amallar

Vektorlar ustida turli chiziqsiz amallar mavjud bo'lib, bu yerda ulardan uchtasini, ya'ni ikki vektorning skalyar va vektor ko'paytmalarini hamda uch vektorning aralash ko'paytmasini keltiramiz.

3.10.1. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi

3.10.1-ta'rif. *Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, ularning modullaridan va ular orasidagi burchak kosinusidan iborat sonlarning ko'paytmasiga aytiladi va $(\vec{a}, \vec{b})$ yoki $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kabi belgilanadi.*

Ta'rif bo'yicha

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad (3.10.1)$$

bo'lib, bu yerda $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ dir (3.10.1-rasm).

Skalyar ko'paytmaning quyidagi xossalariga, uning ta'rifiga asoslanib, ishonch hosil qilish osondir:

$$1^0. \quad \vec{a} \perp \vec{b} \vee \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee (\vec{a} = \vec{0} \wedge \vec{b} = \vec{0}) \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0;$$

$$2^0. \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2,$$

ya'ni vektorning skalyar kvadrati modulining kvadratiga tengdir;

$$3^0. \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$4^0. \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \pi p_a \vec{b} = |\vec{b}| \pi p_b \vec{a};$$

$$5^0. \quad (\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} \pm \vec{a}_2 \cdot \vec{b};$$

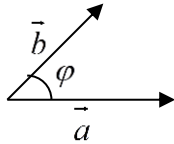
$$6^0. \quad (\lambda \vec{a}, \mu \vec{b}) = (\lambda \mu) (\vec{a}, \vec{b}),$$

bu yerda $\lambda, \mu \in R$.

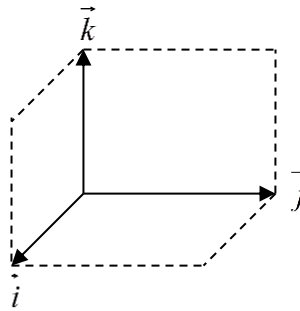
Eslatma. Agar $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ortogonal deyiladi.

1^0 xossadan ko'rinadiki, vektorlarning ortogonallik tushunchasi

ularning perpendikulyarlik tushunchasidan kengroqdir. Darhaqiqat, $\vec{0}$ vektor boshqa bir vektorga perpendikulyar deb bo'lmaydi (chunki, $\vec{0}$ yo'nalishga ega emas), ammo, $\vec{0} \cdot \vec{b} = 0$ dir.



3.10.1- rasm



3.10.2- rasm.

Endi, $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ vektorlar fazoda Dekart bazisida berilganda ularning skalyar ko'paytmasini aniqlaylik:

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= x_1 x_2 \vec{i}^2 + x_1 y_2 (\vec{i}, \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i}, \vec{k}) + \\ &+ y_1 x_2 (\vec{j}, \vec{i}) + y_1 y_2 \vec{j}^2 + y_1 z_2 (\vec{j}, \vec{k}) + \\ &+ z_1 x_2 (\vec{k}, \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k}, \vec{j}) + z_1 z_2 \vec{k}^2 \end{aligned}$$

3.10.2-rasmdan hamda $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{i}$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ ekanligidan ko'rinadiki,

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, (\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{j}, \vec{k}) = (\vec{k}, \vec{i}) = 0$$

o'rinlidir, demak,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (3.10.2)$$

ni olamiz. (3.10.2) vektorlarning skalyar ko'paytmasi formulasining koordinatalar shaklidir.

Ikki vektor orasidagi burchak ularning koordinatalari orqali quyidagicha topiladi: skalyar ko'paytma ta'rifiga ko'ra (3.10.1) dan

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Yuqorida olingan skalyar ko'paytma (3.10.2) va vektor moduli (3.7.1) formulalarini hisobga olib, ($\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ deb faraz qilib),

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (3.10.3)$$

ni olamiz. (3.10.3) ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasi deb yuritiladi.

Agar

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}, \quad (3.10.4)$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0; \quad (3.10.5)$$

shu sababli, (3.10.4) ni vektorlarning kollinearligi, (3.10.5) ni esa ortogonalligi (perpendikulyarligi) sharti deb yuritiladi.

3-bobga doir mashqlar

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ to'g'ri burchakli parallelepipedda berilgan $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ vektorlarga ko'ra
a) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$; b) $\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; c) $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ vektorlarni yasang.
2. Ixtiyoriy ABC uchburchakda E va F nuqtalar mos ravishda AB va AC tomonlarining o'rtasi bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ vektorlarni $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$ vektorlar orqali ifodalang.
Javob: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = 2(\vec{b} - 2\vec{a})$, $\overrightarrow{AC} = 2(\vec{b} - \vec{a})$.
3. Tekislikda $A(2;3)$, $B(-3;3)$, $C(-3;0)$ nuqtalarga koordinatalar boshidan $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ kuchlar qo'yilgan. Ularning teng ta'sir etuvchisi $\overrightarrow{ON}$ ni yasang va uning koordinata o'qlardagi proyeksiyalarini hamda modulini toping.
Javob: $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; $np_{ox} \overrightarrow{ON} = -3$; $np_{oy} \overrightarrow{ON} = 6$ $|\overrightarrow{ON}| = 3\sqrt{50}$
4. To'rtburchak uchlarining koordinatalari berilgan:
 $A(4;0;8)$, $B(5;2;6)$, $C(3;1;4)$, $D(2;-1;6)$ Shu to'rtburchakning kvadrat ekanligini ko'rsating.
5. $\overrightarrow{AB}$ vektorning boshi $A(-1;2;4)$ va uni teng ikkiga bo'luvchi nuqta $C(2;0;2)$ berilgan bo'lsa, B uchining koordinatalarini toping.
Javob: $B(8;-4;-2)$.
6. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlar berilgan. Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.
Javob: 0.
7. $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ va $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ vektorlar berilgan. m ning qanday qiymatlarida bu vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi?
Javob: 4.

Vektor tushunchasi bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring.

1. Vektorga ta'rif bering.
2. Qanday shartlar bajarilganda vektorlar o'zaro teng bo'ladi?
3. Ikkita va undan ortiq vektorlar berilganda, qanday qoida bo'yicha ularning yig'indisini topasiz?
4. Vektorlarni qo'shishda guruhlash va o'rin almashtirish qonunlarini keltiring.
5. Vektorlarni songa ko'paytirishga ta'rif bering.
6. Vektorning o'qdagi proyeksiyasini chizmada ko'rsating.
7. Bazis deganda nimani tushunasiz?
8. Dekart bazisi nima?
9. Vektorni Dekart bazisi bo'yicha tashkil etuvchilarga yoyishni ko'rsating.
10. Vektorning moduli qanday formula yordamida topiladi?
11. Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini tushuntiring.
12. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday formula yordamida topiladi?
13. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish formulalarini yozing.
14. Vektorlarni skalyar ko'paytirish haqida tushuncha bering.
15. Skalyar ko'paytma qanday shartni qanoatlantirganda ikki vektor ortogonal bo'ladi?
16. Skalyar ko'paytmaning xossalari keltiring.

17. Skalyar ko'paytma formulasining koordinatalar shaklini yozing.

18. Ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasini yozing.